DETERMINANTS OF THE LANNA MAGIC SQUARES

ผู้วิจัย : นางสาวพลอยไพลิน บุญช่วย รหัสนักศึกษา 610532006

อาจารย์ที่ปรึกษา : รศ.ดร.อรรถพล แก้วขาว

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

แนวเชิงทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

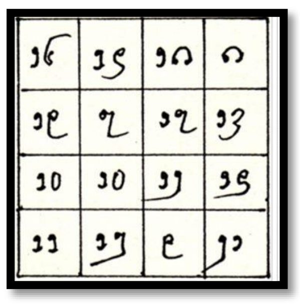
1.จัตุรัสกล คือ จัตุรัสกลขนาด $n \times n$ ที่มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n^2 มาเรียงในตารางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $n \times n$ แต่ละช่องจะมีตัวเลขที่ไม่ซ้ำกับตัวเลขในช่องอื่น ๆ และผลบวกแต่ละแนว แต่ละแถว และเส้นทแยงมุมเท่ากัน จัตุรัสดังกล่าว มีชื่อเรียกโดยทั่วไปว่า จัตุรัสกลปรกติ

2	7	6
9	5	1
4	3	8

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

2.ยันต์พุทธคุณ 56 เป็นผ้ายันต์ล้านนาที่เขียนด้วยอักขระล้านนา มีเอกลักษณ์ในการใช้ตัวเลขต่างจากยันต์อื่น ๆ และมีความน่าสนใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งยันต์ที่กล่าวถึงนี้ได้ถูกบันทึกในหนังสือยันต์และคาถาของดีเมืองเหนือ รวบรวมโดยอินสม ไชยชมพู เป็นหนังสือที่รวบรวมประมวลยันต์และคาถาศักดิ์สิทธิ์มากมายตามความเชื่อของชาวล้านนา เขียนไว้ว่า “ยันต์ลูกนิเทียวทางบ่มีอนทรายแล” หมายถึง “ยันต์ลูกนี้เดินทางปลอดภัยไม่มีอันตราย”

ทีมวิจัยได้ทำการเปลี่ยนเลขอักขระล้านนาในยันต์ เป็นเลขอารบิกและพบว่ามีตัวเลขที่ใช้ในยันต์ 16 ตัว ได้แก่ 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 และ 21 โดยมีเลข 14 ซ้ำกัน 1 คู่ เมื่อหาผลรวมทั้งในแนวตั้ง แนวนอน และแนวทแยง ได้เท่า 56 ซึ่งทีมวิจัยเชื่อว่าเป็นจำนวนพยางค์ในบทสวดสรรเสริญพระพุทธคุณจึงตั้งชื่อยันต์นี้ว่า “ยันต์พุทธคุณ”



ยันต์โทนหรือยันต์พุทธคุณ 56

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

จัตุรัสกลล้านนา

3. **จัตุรัสกลล้านนาแบบแพน** คือ จัตุรัสกลปกติที่เพิ่มคุณสมบัติผลบวกในแนวทแยงมุมย่อยที่มีค่าคงตัวของจัตุรัสกลเท่ากับ M เช่น จัตุรัสกลขนาด 4 × 4 จะเป็นจัตุรัสกลแบบแพนเมื่อ

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

แนวแถว $a+b+c+d=e+f+g+h=i+j+k+l=m+n+o+p=M$

แนวหลัก $a+e+i+m=b+f+j+n=c+g+k+o=d+h+l+p=M$

แนวทแยงมุม $a+f+k+l=d+g+j+m=M$

$a+h+k+n=b+e+l+o=c+f+i+p=M$

แนวทแยงย่อย $d+e+j+o=c+h+i+n=b+g+l+m=M$

ซึ่งอัญมณี แสนพรม ได้ทำการศึกษาพบว่าจัตุรัสกลล้านนาแบบแพน เกิดจากการแปลงทางคณิตศาสตร์ 5 แบบ คือ

T_1 การสะท้อนโดยมีเส้นทแยงมุมเป็นเส้นสะท้อนหลัก T_2 การหมุน 90 องศา แบบทวนเข็มนาฬิกา

T_3 การย้ายหลักแรกไปเป็นหลักสุดท้าย T_4 การย้ายแถวแรกไปเป็นแถวสุดท้าย

T_5 การแปลงแบบพิเศษ

4. การดำเนินการเบื้องต้นของเมทริกซ์

การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวของเมทริกซ์

นิยาม การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวของเมทริกซ์ A คือการดำเนินการแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้ เมื่อ R_i แทนแถวที่ i ของเมทริกซ์

- การสับเปลี่ยนระหว่างสองแถวใด ๆ เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$
- การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยสเกลาร์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $kR_i, k \neq 0$
- การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยสเกลาร์ k แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง เขียนแทนด้วย $kR_i + R_j, i \neq j$

การดำเนินการเบื้องต้นแบบหลักของเมทริกซ์

นิยาม การดำเนินการเบื้องต้นแบบหลักของเมทริกซ์ A คือการดำเนินการแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้ เมื่อ C_i แทนหลักที่ i ของเมทริกซ์

- การสับเปลี่ยนระหว่างสองหลักใด ๆ เขียนแทนด้วย $C_i \leftrightarrow C_j$
- การคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วยสเกลาร์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $kC_i, k \neq 0$
- การคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วยสเกลาร์ k แล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง เขียนแทนด้วย $kC_i + C_j, i \neq j$

5. คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

ทฤษฎีบท 2.5.1 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า $|A| = |A^T|$

ทฤษฎีบท 2.5.2 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ และ B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสับเปลี่ยนระหว่างแถว(หลัก) สองแถว (หลัก) ใด ๆ ของเมทริกซ์ A จะได้ว่า $|B| = -|A|$

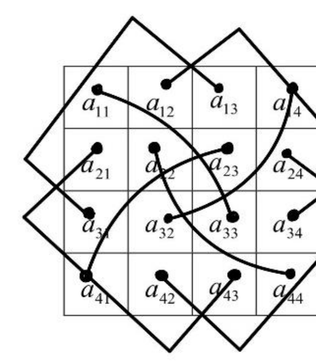
ทฤษฎีบท 2.5.3 ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถว(หลัก) ใดแถวหนึ่ง(หลักหนึ่ง) ของ $n \times n$ เมทริกซ์ A ด้วยสเกลาร์ c จะได้ว่า $|B| = c|A|$

ทฤษฎีบท 2.5.4 ให้ A เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการนำสเกลาร์ c คูณกับแถว (หลัก) ที่ p แล้วนำไปบวกกับแถว (หลัก) ที่ q ของ A โดยที่ $p \neq q$ จะได้ว่า $|B| = |A|$

การค้นคว้าอิสระนี้ เป็นการศึกษายันต์โทนล้านนาชิ้นหนึ่งในเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นจัตุรัสกลที่พบในยันต์ทางภาคเหนือที่มีอักขระและตัวเลขล้านนา โดยถูกนำมาแปลงเป็นตัวเลขฮินดูอารบิกที่มีตัวเลขเรียงกัน จำนวน 16 ตัว ได้แก่ 7, 8, 9, 10, 11,12, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 และ 21 โดยที่มีเลข 14 ซ้ำกัน 1 คู่ และยังคงมีสมบัติที่เป็นจัตุรัสกล คือ ผลบวกแนวแถว แนวหลัก และแนวทแยงมุม มีค่าเท่า 32 รวมไปถึงการจัดรูปแบบของจัตุรัสกลล้านนาได้ 6 รูปแบบที่แตกต่างกันและแสดงการพิสูจน์หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาแบบแพน ที่เกิดจากการแปลงทางคณิตศาสตร์ 5 แบ ของจัตุรัสกลล้านนาตัวตนแบบ 1 ตัว ได้แก่ การสะท้อนโดยเส้นทแยงมุมหลักเป็นเส้นสะท้อน การหมุน 90 องศา แบบทวนเข็มนาฬิกา การย้ายหลักแรกไปเป็นหลักสุดท้าย การย้ายแถวแรกไปเป็นแถวสุดท้าย และการแปลงแบบพิเศษ โดยการนำความรู้เรื่องการดำเนินการเบื้องต้นของเมทริกซ์จึงทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับศูนย์ อีกทั้งยังสามารถเป็นแนวทางให้กับผู้ที่สนใจได้ศึกษาความเป็นจัตุรัสกลของยันต์ล้านนาอื่น ๆ อีกต่อไป

ผลการศึกษา

1. จัตุรัสกลล้านนา สามารถจัดรูปแบบความสัมพันธ์การจับคู่ตัวเลขในจัตุรัสกลให้มีผลรวมเท่ากับ 16 ได้ทั้งหมด 6 รูปแบบ ซึ่งกลล้านนาแบบแพน ถูกจัดอยู่ในกลุ่มที่ 1 โดยรูปแบบ และจำนวนทั้งหมดที่เป็นไปได้ 384 แบบ มีความสัมพันธ์ ดังภาพ



$a_{11} + a_{33} = 16$ $a_{14} + a_{32} = 16$

$a_{13} + a_{31} = 16$ $a_{21} + a_{43} = 16$

$a_{44} + a_{22} = 16$ $a_{41} + a_{23} = 16$

$a_{42} + a_{24} = 16$ $a_{34} + a_{12} = 16$

และแสดงว่ารูปแบบการบวกของจำนวนสองจำนวนที่มีผลรวมเท่ากับ 16 ยังคงเหมือนเดิมภายใต้การแปลงทั้ง 5 แบบ

2. ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาแบบแพน โดยใช้ความรู้การดำเนินการเบื้องต้นของเมทริกซ์แล้วมีผลลัพธ์เท่ากับศูนย์ คือ

ทฤษฎีบท 1 ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาที่เกิดจากการแปลงด้วย T_1 มีค่าเท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 2 ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาที่เกิดจากการแปลงด้วย T_2 มีค่าเท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 3 ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาที่เกิดจากการแปลงด้วย T_3 มีค่าเท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 4 ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาที่เกิดจากการแปลงด้วย T_4 มีค่าเท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 5 ดีเทอร์มิแนนต์ของจัตุรัสกลล้านนาที่เกิดจากการแปลงด้วย T_5 มีค่าเท่ากับ 0

ตัวอย่าง

รูปต้นแบบ

10	13	1	8
2	7	11	12
15	8	6	3
5	4	14	9

การสะท้อนโดยมีเส้นทแยงมุมเป็นเส้นสะท้อนหลัก

10	2	15	5
13	7	8	4
1	11	6	14
8	12	3	9

การหมุน 90 องศา แบบทวนเข็มนาฬิกา

10	2	15	5
13	7	8	4
1	11	6	14
8	12	3	9

การย้ายหลักแรกไปเป็นหลักสุดท้าย

13	1	8	10
7	11	12	2
8	6	3	15
4	14	9	5

การย้ายแถวแรกไปเป็นแถวสุดท้าย

2	7	11	12
15	8	6	3
5	4	14	9
10	13	1	8

การแปลงแบบพิเศษ

10	8	12	2
13	1	11	7
4	14	6	8
5	9	3	15

3. จัตุรัสกลมีปรากฏในประเทศไทย ตั้งแต่สมัยอาณาจักรอยุธยา ในหนังสือแปลชื่อว่า “จดหมายเหตุ ลาลูแบร์” โดยมีการจดบันทึกเรื่องราวเหตุการณ์ของฑูตชาวฝรั่งเศสที่มายังอาณาจักรอยุธยา และมีการกล่าวถึงวิธีการสร้างจัตุรัสกลอย่างง่าย โดยตั้งชื่อว่า “วิธีสยาม” จึงเชื่อว่าคนไทยในสมัยก่อนเรียนรู้จากการสร้างจัตุรัสกลมาเป็นแนวทางในการเขียนยันต์ต่าง ๆ ให้มีความหมายทางโหราศาสตร์จนถึงปัจจุบัน

เอกสารอ้างอิง

- อินสม ไชยชมภู. *ยันต์และคาถาของดีเมืองเหนือ.* ลำพูน ร้านภิญโญ หน้า 130
- วรรณิษา อภัยรัตน์. (2556). จัตุรัสกลกับยันต์ล้านนา. เข้าถึงเมื่อ 26 เมษายน 2563.
- U. Seanproma , A. Kaewkhao , N. Tongsiri ,and A. Kettapun, A Group Action on Pandiagonal Lanna Magic Squares, *Thai Journal of Mathematics*, 2018; 2: 443-453.
- มานพ ชัยดิเรก. (2542). พีชคณิตเชิงเส้น. ชลบุรี:ชลบุรีการพิมพ์
- จุฑารัตน์ ใจกล้า. (2564). การแจงนับจัตุรัสกลล้านนา. วิทยานิพนธ์ วท.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่