การมีจริงของผลเฉลยของ $x^3+y^3=3z^3$ และ $x^3+4y^3=1$ ในจำนวนเต็มแบบเกาส์

บทคัดย่อ

การวิจัยในครั้งนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการมีจริงของผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ และ $x^3+4y^3=1$ ในจำนวนเต็มแบบเกาส์ $\mathbb{Z}[i]$ โดยแบ่งการมีผลเฉลยของสมการข้างต้นออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีผลเฉลยแบบชัด และกรณีผลเฉลยแบบไม่ชัด จากการศึกษาพบว่าผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ มีเพียงผลเฉลยแบบชัดเท่านั้นคือ $(\delta,-\delta,0)$ เมื่อ $\delta\in\mathbb{Z}[i]$ ด้วยการพิสูจน์ว่าถ้าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยแบบไม่ชัดแล้วจะส่งผลให้เส้นโค้งอิลลิปติก $y^2=x^3+3888$ มีจุดตรรกยะและจากการศึกษาพบว่าเส้นโค้งนี้ไม่มีจุดตรรกยะใน $\mathbb{Q}^2$ และกรณีผลเฉลยของสมการ $x^3+4y^3=1$ พบว่ามีผลเฉลยแบบชัดเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(1,0)$

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการมีจริงของผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ และ $x^3+4y^3=1$ ในจำนวนเต็มแบบเกาส์

2. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการมีผลเฉลยแบบไม่ชัดของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ ในจำนวนเต็มแบบเกาส์ที่ส่งผลต่อการมีจุดตรรกยะใน $\mathbb{Q}^2$ บนเส้นโค้งอิลลิปติก

$y^2=x^3+3888$

ที่มาและความสำคัญ

การศึกษาการมีจริงของผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ และ $x^3+4y^3=1$ เราจะมุ่งเน้นศึกษาเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม การศึกษาผลเฉลยของสมการดังกล่าวเราได้มีการขยายขอบเขตของผลเฉลยโดยใช้จำนวนที่เรียกว่า **จำนวนเต็มแบบเกาส์** ถ้า $\mathbb{Z}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม แล้วจำนวนเต็มแบบเกาส์คือจำนวนที่อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{Z}$ และ $i^2=-1$ ต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$ แทนเซตของจำนวนเต็มแบบเกาส์ จากนิยามของจำนวนเต็มแบบเกาส์จะได้ว่าจำนวนเต็มทั้งหมดเป็นจำนวนเต็มแบบเกาส์ด้วย จากการศึกษาพบว่าจำนวนเต็มแบบเกาส์มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการบวกและการคูณ และเรายังพบว่าจำนวนเต็มแบบเกาส์มีสมบัติเป็นริงภายใต้การบวกและการคูณซึ่งสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนเต็มแบบเกาส์สามารถเชื่อมโยงกับสมบัติของจำนวนเต็มได้เป็นอย่างดี และการศึกษาในครั้งนี้เรายังพบเงื่อนไขบางประการที่มีผลต่อการมีผลเฉลยของสมการข้างต้นในจำนวนเต็มแบบเกาส์อีกด้วย ในปี ค.ศ. 2008 บทความของ Lamkis [3] ได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=z^3$ มีเพียงผลเฉลยแบบชัดเท่านั้นในจำนวนเต็มแบบเกาส์ ด้วยการแสดงให้เห็นว่าถ้าสมการ $x^3+y^3=z^3$ มีผลเฉลยแบบไม่ชัดจะส่งผลให้เส้นโค้งอิลลิปติก $y^2=x^3+432$ มีจุดตรรกยะ นั่นคือมีจุด (x,y) ที่สอดคล้องกับสมการ $y^2=x^3+432$ โดยที่ $x,y\in\mathbb{Q}$ และบทความดังกล่าวได้ศึกษาต่อพบว่าเส้นโค้ง $y^2=x^3+432$ นี้ไม่มีจุดตรรกยะใน $\mathbb{Q}^2$ ทำให้ $x^3+y^3=z^3$ มีเพียงผลเฉลยแบบชัด

ดังนั้นการวิจัยในครั้งนี้เราจะศึกษาการมีจริงของผลเฉลยของสมการที่กล่าวมาคือสมการ $x^3+y^3=3z^3$ และ $x^3+4y^3=1$ โดยแบ่งการมีผลเฉลยของสมการดังกล่าวเป็นสองกรณีได้แก่ กรณีผลเฉลยแบบชัด และกรณีผลเฉลยแบบไม่ชัด และในกรณีผลเฉลยแบบไม่ชัดเราจะศึกษาต่อว่าจะส่งผลอย่างไรกับการมีจุดตรรกยะใน $\mathbb{Q}^2$ บนเส้นโค้งอิลลิปติก

ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม ให้ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็มจะเรียก $a+bi$ ว่า **จำนวนเต็มแบบเกาส์** (Gaussian integers) ถ้า $a,b\in\mathbb{Z}$ และ $i^2=-1$ และให้ $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$ แทนเซตของจำนวนเต็มแบบเกาส์

บทนิยาม ให้ (x,y,z) และ (x,y) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ และ $x^3+4y^3=1$ ตามลำดับเราจะเรียกผลเฉลยดังกล่าวว่า**ผลเฉลยแบบชัด**เมื่อ $xyz=0$ และ $xy=0$ ตามลำดับ และเรียกว่า**ผลเฉลยแบบไม่ชัด**เมื่อ $xyz\neq 0$ และ $xy\neq 0$ ตามลำดับ

เส้นโค้งอิลลิปติก $E: y^2=x^3+3888$

จากการศึกษาใน [3] , [4] , [6] และ [7] เราพบว่าเส้นโค้งอิลลิปติก $E: y^2=x^3+3888$ มีโครงสร้างของกรุปของจุดตรรกยะเป็น $E(\mathbb{Q})\cong E(\mathbb{Q})_{tors}\times\mathbb{Z}^r$ ซึ่งมีค่าแรงค์ (rank) หรือ $r=0$ และอันดับ (order) ของกรุปย่อยทอร์ชัน (torsion subgroup) หรือ $E(\mathbb{Q})_{tors}$ เท่ากับ 1 ส่งผลให้เส้นโค้งอิลลิปติกมีจุดที่อนันต์ (point at infinity) หรือจุด ∞ เพียงจุดเดียวนั่นคือ $E(\mathbb{Q})=\{\infty\}$ ดังนั้นเส้นโค้งอิลลิปติกนี้ไม่มีจุดตรรกยะใน $\mathbb{Q}^2$

ผลการศึกษา

❖ กรณีผลเฉลยของ $x^3+y^3=3z^3$

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า (α,β,γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3z^3$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ แล้ว $\alpha\beta\gamma=0$

<u>บทแทรก</u> ให้ $m\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $m>1$ และ (α,β,γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^3+y^3=3^m z^3$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ ถ้า $3|m-1$ แล้ว $\alpha\beta\gamma=0$

คาร์ล ฟรีดริช เกาส์

(1777–1855)

❖ กรณีผลเฉลยของ $x^3+4y^3=1$

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า (α,β) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^3+4y^3=1$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ แล้ว $(\alpha,\beta)=(1,0)$

<u>บทแทรก</u> ให้ $m\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $m>1$ และ (α,β) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^3+4^m y^3=1$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ ถ้า $3|m-1$ แล้ว $(\alpha,\beta)=(1,0)$

เอกสารอ้างอิง

ศึกษางานวิจัยเพิ่มเติมได้ที่

ผู้วิจัย: นายธนพล จันทาพุฒ รหัส 620532006

อาจารย์ที่ปรึกษา : รศ.ดร.ณัฐกร สุคันธมาลา

สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่